2.8.17 Záporné mocniny

Předpoklady: 0208016

Př. 1: Vypočti. Výsledek vyjádři jako mocninu.

a) $6^{12}\cdot 6^{7}$ b) $\frac{11^{152}}{11^{144}}$ c) $\left(2^{3}\right)^{4}$ d) $\frac{\left(3^{2}\right)^{6}}{3^{7}}$

e) $\frac{2^{4}}{2^{6}}$ f) $3^{n+3}\cdot 3^{2n-1}$ g) $\frac{2^{3}\cdot 2^{n-1}}{2^{n}}$ h) $\left(2^{n+1}\right)^{3}$

a) $6^{12}\cdot 6^{7}=6^{12+7}=6^{19}$ b) $\frac{11^{152}}{11^{144}}=11^{152-144}=11^{8}$ c) $\left(2^{3}\right)^{4}=2^{3\cdot 4}=2^{12}$

d) $\frac{\left(3^{2}\right)^{6}}{3^{7}}=\frac{3^{2\cdot 6}}{3^{7}}=\frac{3^{12}}{3^{7}}=3^{12-7}=3^{5}$ e) $\frac{2^{4}}{2^{6}}=2^{4-6}=2^{-2}$ (co to znamená?)

f) $3^{n+3}\cdot 3^{2n-1}=3^{n+3+2n-1}=3^{3n+2}$ g) $\frac{2^{3}\cdot 2^{n-1}}{2^{n}}=2^{3+n-1-n}=2^{2}$

h) $\left(2^{n+1}\right)^{3}=2^{(n+1)\cdot 3}=2^{3n+3}$

Pedagogická poznámka: Nejdůležitější je bod e). Jeho řešení vyvolá diskusi, která poté vede k zavedení záporného mocnitele.

Bod e) v předchozím příkladu: $\frac{2^{4}}{2^{6}}=2^{4-6}=2^{-2}$.

Co to znamená? Nemůžeme přece opakovat násobení číslem 2 -2krát.

Rozepíšeme mocniny ve zlomku: $\frac{2^{4}}{2^{6}}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^{2}}$.

Zdá se, že platí: $2^{-2}=\frac{1}{2^{2}}$. Je to rozumné?

- Dělení je opačná operace k násobení.
- Když zmenšíme exponent o jedna, ubude jedno číslo, které násobíme (jako bychom měli mocninu napsanou ve zlomku a přidali jedno násobení číslem do jmenovatele):
  - $2^{3}=2\cdot 2\cdot 2$
  - $2^{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2}=2\cdot 2$ (předchozí výraz jsme vydělili číslem 2),
  - $2^{1}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2}=2$ (předchozí výraz jsme vydělili číslem 2),
  - $2^{0}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2}=1$ (předchozí výraz jsme vydělili číslem 2),
  - $2^{-1}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2}$ (předchozí výraz jsme vydělili číslem 2),

- $2^{-2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$ (předchozí výraz jsme vydělili číslem 2).
- zavedení záporného mocnitele je logickým pokračování řady.

Pro každé reálné číslo a různé od nuly, platí $a^0 = 1$.

Pro každé reálné číslo a různé od nuly, každé celé číslo z platí $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.

Př. 2: Vypočti tak, aby výsledek neobsahoval mocninu.
a) 3^{-2} b) 2^{-5} c) 10^{-3} d) 11^{-2} e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-3}$

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ b) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ c) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

d) $11^{-2} = \frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}$ e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ f) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \frac{1}{3}$

Př. 3: Vyjádři mocniny deseti jako desetinná čísla.
a) 10^{-2} b) 10^{-5} c) 10^{-1} d) 10^{-9} e) 10^{-4}

a) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ b) $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$

c) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ d) $10^{-9} = \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,001$

e) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1$

Pedagogická poznámka: Rozhodně není nutné, aby žáci rozepisovali celý postup tak, jak je uvedeno v učebnici. Naopak čím dřív poznají, že výsledky mohou psát z hlavy, tím lépe.

Př. 4: Zapiš čísla jako mocniny deseti. Jakým způsobem určuješ mocnitele?
a) 100 b) $0{,}001$ c) $0{,}000\,01$ d) $100\,000\,000$ e) $0{,}000\,000\,001$

a) $100 = 10^2$ b) $0{,}001 = 10^{-3}$ c) $0{,}000\,01 = 10^{-5}$

d) $100\,000\,000 = 10^8$ e) $0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$

Pokud jde o číslo větší než jedna odpovídá mocnitel počtu nul čísla. Pokud je číslo menší než 1 odpovídá záporný mocnitel počtu desetinných míst.

Př. 5: Vypočti.

a) 2^{-3} b) 4^{-2} c) 1^{-15} d) 3^{-4} e) 7^{-1} f) 13^{-2}

a) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ b) $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ c) $1^{-15}=\frac{1}{1^{15}}=\frac{1}{1}=1$

d) $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$ e) $7^{-1}=\frac{1}{7}$ f) $13^{-2}=\frac{1}{13^2}=\frac{1}{169}$

Př. 6: Vypočti.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{27}}=27$

c) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{10\,000}}=10\,000$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

Zajímavý postře z předchozích příkladů: záporná mocnina obrací zlomky. V příkladu 5 se čísla z čitatele dostala do jmenovatelů, v příkladu 6 se naopak z jmenovatele přesunula do čitatele. V bodu 6 d) se pak číslo ve zlomku prohodila.

Př. 7: V kapitole o zlomcích jsme se setkali s převrácenými čísly (2 a $\frac{1}{2}$, ...). Zapiš převrácené číslo k číslu a pomocí mocniny.

Převrácené číslo k číslu a je číslo $\frac{1}{a}=a^{-1}$ $\Rightarrow$ převrácené číslo k číslu je číslo a^{-1} (což je nejčastější označení převrácené hodnoty na kalkulačkách)

Př. 8: Vypočti:

a) a^{-3}, je-li $a^3=16$, b) a^2, je-li $a^{-2}=7$,
c) a^{-2}, je-li $a=5$, d) a^4, je-li $a^{-3}=8$,
e) a^2, jeli $a^{-4}=36$, f) a^{-2}, jeli $a^6=8$.

a) a^{-3}, je-li $a^3=16$, $a^{-3}=\frac{1}{a^3}=\frac{1}{16}$.

b) a^2, je-li $a^{-2}=7$, $a^{-2}=7\Rightarrow a^{-1}=\sqrt{7}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{7}}\Rightarrow a^2=\frac{1}{\sqrt{7}^2}=\frac{1}{7}$.

c) a^{-2}, je-li $a=5$, $a^{-2}=5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$.

d) a^4, je-li $a^{-3}=8$, $a^{-3}=8 \Rightarrow a^{-1}=\sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow a^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

e) a^2, jeli $a^{-4}=36$, $a^{-4}=36 \Rightarrow a^{-2}=\sqrt{36}=6 \Rightarrow a^2=\frac{1}{6}$.

f) a^{-2}, jeli $a^6=8$, $a^6=8 \Rightarrow a^2=\sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow a^{-2}=\frac{1}{2}$.

Shrnutí: Mocnitelem může být i záporné číslo. Platí $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.